

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МНОГОФАЗНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

### Analytical solutions of the multiphase and multicomponent filtration problems

Analytical solutions to the Riemann problems for three different oil or gas displacement regimes as a particular cases of more complex compositional displacement — are given in article. The method of characteristics from theory of quasilinear hyperbolic differential equations is applied to mathematical description of first two types of displacement.

В.Е. Лялин,  
К.А. Сидельников,  
Ижевский  
государственный технический  
университет

Математическое моделирование многофазной многокомпонентной фильтрации является, по существу, все еще открытым вопросом. Фактически, движение смеси флюидов, состоящих из различного числа компонент, представляет собой сложную с точки зрения физики задачу, поскольку необходимо учитывать различные процессы в разных масштабах одновременно. В микроскопическом масштабе преобладают капиллярные силы, тогда как силы трения (вязкость) и тяжести обычно учитываются при крупномасштабном описании. Однако помимо этого необходимо учитывать массообмен между фазами, существенно проявляющий себя при явлениях, характерных в технологиях добычи нефти путем закачки газа при высоком давлении или поверхностно-активных веществ. Ценность аналитического решения хотя бы некоторых частных случаев этой серьезной проблемы проявляется в следующих моментах [2]:

- быстрая интерпретация лабораторных экспериментов;
- выявление структуры решения, способной определить более эффективные методы добычи флюидов в подповерхностном слое;
- строительный блок для определенных численных методов;
- моделирование на базе метода линий/трубок тока;
- совершенствование моделей относительных проницаемостей;
- сравнительный анализ численных методов, когда аналитическое решение выступает в роли эталонного.

Для облегчения понимания приведем некоторые необходимые сведения и терминологию, которые будут встречаться далее по тексту. Фазой называется макроскопическая физически однородная часть вещества, отделенная от остальных частей системы границами раздела. Простейший пример: вода и смесь воздуха с водяными парами. Система в данном случае является двухфазной (жидкость и газообразная смесь). В общем случае каждая фаза состоит из какого-либо количества химически однородных веществ, которые могут меняться независимо друг от друга, если фазы не находятся в равновесии. При термодинамическом же равновесии должны существовать определенные количественные соотношения между веществами, входящими в состав фазы. Эти вещества называются независимыми компонентами системы или просто компонентами.

### Исходные уравнения многофазной многокомпонентной фильтрации

Рассмотрим произвольный объем  $V(t)$  пористой среды, ограниченный поверхностью  $S(t)$ . Материальный баланс компонента в контрольном объеме может быть сформулирован следующим образом [1]

Скорость изменения количества компонента $i$ в $V(t)$	=	Чистый приток компонента $i$ в $V(t)$ за счет течения фаз	+	Чистый приток компонента $i$ в $V(t)$ за счет гидродинамической дисперсии
---	---	---	---	---

Окончательная форма уравнений неразрывности для многокомпонентного, многофазного потока в дифференциальном виде выглядит так [1, 2, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_j S_j + \nabla \cdot \sum_{j=1}^n x_{ij} \rho_j \vec{u}_j - \nabla \cdot \phi \sum_{j=1}^{n_p} \vec{K}_{ij} \cdot \nabla \rho_j x_{ij} = 0, \quad (1)$$

$$i = 1 \dots n_c$$

где  $\phi$  — пористость (объем порового пространства в единичном объеме пористой среды);  $x_{ij}$  — молярная доля  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе;  $\rho_j$  — молярная плотность фазы  $j$ ;  $S_j$  — насыщенность  $j$ -й фазой (объем, занимаемый  $j$ -й фазой, в единичном объеме порового пространства);  $\vec{u}_j$  — вектор скорости фильтрации  $j$ -й фазы в случае многомерного потока;  $\vec{K}_{ij}$  — тензор дисперсии  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе;  $n_p$  — общее число фаз;  $n_c$  — общее число компонентов в системе.

Кроме того, для уравнения (1) устанавливаются дополнительные ограничения [1, 2, 7, 8]:

$$\sum_{j=1}^{n_p} S_j = 1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n_c} x_{ij} = 1, \quad j = 1 \dots n_p, \quad (3)$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ik}, \quad j = 1 \dots n_p, \quad k = 1 \dots n_p, \quad k \neq j. \quad (4)$$

Условие (2) означает, что флюиды заполняют все поровое пространство. Молярная доля компонентов в каждой фазе должна удовлетворять условию (3). Равенство (4) представляет собой условие химического равновесия [1] и говорит о том, что химический потенциал  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе равен его химическому потенциалу во всех других представленных фазах (необходимо учесть то, что в соответствии со стандартным обозначением,  $\mu_{ij}$  есть химический потенциал  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе, тогда как  $\mu_j$  — вязкость  $j$ -й фазы).

Воспользуемся обобщенным уравнением Дарси предложенного Маскетом (см. [6]) для моделирования скорости фильтрации [1, 2, 7, 8]:

$$\vec{u}_j = - \frac{\vec{k} k_{rj}}{\mu_j} \cdot (\nabla P_j + \rho_{mj} \vec{g}), \quad (5)$$

где  $\vec{k}_{ij}$  — тензор абсолютной проницаемости (в большинстве практических задач можно (или необходимо) предположить, что он диагональный [7]);  $k_{rj}$  — относительная проницаемость для  $j$ -й фазы;  $\mu_j$  — вязкость  $j$ -й фазы;  $P_j$  — давление в  $j$ -й фазе;  $\rho_{mj}$  — массовая плотность  $j$ -й фазы;  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения.

Нижний индекс для давления в уравнении (5) означает, что давления в разных фазах имеют разную величину, другими словами фазы разделены кривой поверхностью раздела с ненулевым межфазным натяжением. Связь между этими давлениями всегда представляется через функцию капиллярного давления в следующем виде [1, 2]

$$P_j - P_k = P_{ckj}, \quad j = 1 \dots n_p, \quad k = 1 \dots n_p, \quad k \neq j. \quad (6)$$

Эти равновесные функции капиллярного давления обычно рассматриваются как функции от насыщенности каждой из фаз (и иногда они приводятся к масштабу межфазного натяжения). Кроме того, они зависят от свойств флюидов и пористой среды, которые могут быть измерены при проведении независимых экспериментов. В общем случае функции, которые описывают свойства каждой фазы и относительную проницаемость должны задаваться следующим образом [1, 2]

$$\rho_j = \rho_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_c-1}, P_j, T) \quad (7)$$

$$\mu_j = \mu_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_c-1}, P_j, T), \quad (7)$$

$$k_{rj} = k_{rj}(S_1, S_2, \dots, S_{n_p-1})$$

с указанием начальных и граничных условий для решения уравнения (1).

### Дисперсионные члены

Диффузия и гидродинамическая дисперсия — независимые физические механизмы. Диффузия может происходить из-за градиентов концентрации даже при отсутствии течения, а локальные флуктуации в скорости потока, которые приводят к гидродинамической дисперсии (см. [5]), могли бы возникнуть, даже если нет диффузии. Тем не менее, математические представления этих двух механизмов очень похожи, а их результаты их влияния обычно эквивалентны друг другу [1]. Тензор дисперсии  $\vec{K}_{ij}$   $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе включает как диффузионные так и дисперсионные члены. Вклад диффузии описывается молекулярным диффузионным коэффициентом  $D_{ij}$ , а дисперсионное влияние на локальную скорость вытеснения обычно рассматривают как имеющее линейный характер. Типичные выражения для коэффициентов продольной и поперечной дисперсии имеют следующий вид [5]

$$(K_l)_{ij} = D_{ij} + \frac{(\alpha_{lj} - \alpha_{ij})}{\phi S_j |\vec{u}_j|} (u_l)_j^2 + \frac{\alpha_{ij} |u_j|}{\phi S_j}$$

$$(K_t)_{ij} = \frac{(\alpha_{lj} - \alpha_{ij})}{\phi S_j |\vec{u}_j|} |(u_l)(u_t)|, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — материальная константа, известная как дисперсность пористой среды;  $D_{ij}$  — коэффициент диффузии  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе; нижние индексы  $l$  и  $t^1$  обозначают продольное и поперечное направления потока.

#### Уравнения для одномерного потока

Уравнение (1) достаточно сложное и должно решаться численными методами, если не делать дополнительных упрощений. Будем рассматривать одномерный поток, при котором не учитывается влияние разностей давления между фазами ( $P_{ckj} = 0$ ). Если пренебречь капиллярным давлением, то уравнение (1) может быть упрощено за счет исключения градиента давления из выражения для скоростей фильтрации (5). Тогда скорости фильтрации можно записать с использованием функции распределения фаз в общем потоке  $f_j$  в неекторном виде [1]

$$u_j = f_j u_T = f_j \sum_{k=1}^{n_p} u_k, \quad j=1 \dots n_p, \quad (9)$$

где  $u_T$  — общая скорость фильтрации потока, определяемая как сумма скоростей фильтрации каждой из фаз  $u_j$ .

Суть подхода с применением функции распределения потоков (см. [2] и [7]) состоит в получении эллиптического уравнения для давления и системы уравнений для насыщенности параболического типа (при  $P_{ckj} = 0$  и отсутствии дисперсионных членов уравнения становятся гиперболическими). Одномерный вариант конвективно-дисперсионных уравнений для насыщенности каждой из фаз в случае многокомпонентного многофазного потока можно представить так [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_j S_j + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \left( x_{ij} \rho_j f_j u_T - \phi K_{ij} \frac{\partial \rho_j x_{ij}}{\partial x} \right) = 0, \quad (10)$$

$$i = 1 \dots n_c$$

При этом выражение для функции распределения  $j$ -й фазы в общем потоке (гиперболической части объемного расхода [2]) имеет следующий вид [1, 2]

$$f_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_T} \left( 1 - \frac{kg \sin \theta}{u_T} \sum_{n=1}^{n_n} \lambda_n (\rho_{mj} - \rho_{mn}) \right), \quad (11)$$

где подвижность  $j$ -й фазы  $\lambda_j$  определяется так [2, 4]

$$\lambda_j = \frac{k_{rj}}{\mu_j}, \quad (12)$$

общая подвижность равняется [2, 4]

$$\lambda_T = \sum_{n=1}^{n_p} \frac{k_{rn}}{\mu_n}, \quad (13)$$

а  $\theta$  есть угол между направлением потока и горизонтальной линией.

#### Уравнения в случае чистой конвекции

Если эффектами дисперсии можно пренебречь, то уравнение (10) становится набором уравнений, которые описывают процесс чистой конвекции с движением фаз, находящихся в равновесии,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_j S_j + \frac{\partial}{\partial x} u_T \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_j f_j = 0, \quad (14)$$

Удобно (как с аналитической точки зрения, так и при проведении численного анализа) записать основное уравнение (14) в безразмерном виде. Введем следующие масштабные переменные [1]:

$$t_D = \frac{u_{inj} t}{\phi L}, \quad (15)$$

$$x_D = \frac{x}{L}, \quad (16)$$

$$u_D = \frac{u}{u_{inj}}, \quad (17)$$

$$\rho_{jD} = \frac{\rho_j}{\rho_{inj}}, \quad (18)$$

где  $u_{inj}$  и  $\rho_{inj}$  — скорость фильтрации и плотность нагнетаемого флюида;  $L$  — длина (характерная) одномерной системы, где происходит фильтрация. Все переменные (15-18) имеют вполне очевидный физический смысл. Безразмерное время (15) есть «время», которое требуется для вытеснения единичного порового объема флюида, имеющего скорость фильтрации и плотность нагнетаемого флюида (объем, в котором осуществляется фильтрация флюидов, с единичной площадью поперечного сечения и длиной  $L$  равен  $\phi L$ , а объемный расход через единичную площадь есть  $u_{inj}$ , поэтому время, требуемое для продвижения потока на длину  $L$  определяется как  $\phi L / u_{inj}$ ). Таким образом,  $t_D$  (15) есть безразмерный объем жидкости, закаченной в пласт к моменту времени  $t$ . «Координата»  $x_D$  (16) представляет собой объем пласта между начальным сечением и сечением  $x$ , выраженный в долях порового объема. Для простоты будем

<sup>1</sup> От англ. слов longitudinal (продольный) и transverse (поперечный) соответственно.

считать, что пористость  $\phi$  есть величина постоянная, хотя это допущение может быть легко устранено. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_{jD} S_j + \frac{\partial}{\partial x_D} u_D \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_{jD} f_j = 0, \quad (19)$$

Введем обозначения дополнительных функций  $G_{iD}$  и  $H_{iD}$  равные [1]

$$G_{iD} = \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_{jD} S_j, \quad (20)$$

и

$$H_{iD} = u_D \sum_{j=1}^{n_p} x_{ij} \rho_{jD} f_j, \quad (21)$$

где  $G_{iD}$  — безразмерная общая «концентрация»  $i$ -го компонента в единице объема;  $H_{iD}$  — безразмерный общий молярный «расход»  $i$ -го компонента. Тогда уравнение (18) окончательно принимает вид

$$\frac{\partial G_{iD}}{\partial t_D} + \frac{\partial H_{iD}}{\partial x_D} = 0, \quad i = 1 \dots n_c. \quad (22)$$

В некоторых случаях (вытеснение нефти газом при высоком давлении, процессы заводнения в системах жидкость/жидкость с применением поверхностно-активных веществ) разумно предположить, что парциальный объем каждого компонента является постоянным (т.е. не зависит от фазы и ее состава), а значит, создается условие для идеального перемешивания. Другими словами, объем занимаемый заданным количеством компонента не зависит от того, в какой фазе этот компонент присутствует. В результате, уравнение (22) может дополнительно быть упрощено, поскольку каждый компонент имеют постоянную молярную плотность  $\rho_{ci}$  в любой фазе. За счет этого, локальная скорость фильтрации всюду постоянная и равна скорости нагнетания, т.е.  $u_D = 1$ . Объем занимаемый  $i$ -м компонентом в одном моле  $j$ -й фазы есть  $x_{ij}/\rho_{ci}$ , тогда объемная доля  $i$ -го компонента в  $j$ -й фазе определяется как

$$c_{ij} = \frac{x_{ij}/\rho_{ci}}{\sum_{i=1}^{n_c} x_{kj}/\rho_{ck}}. \quad (23)$$

Молярная плотность фазы вычисляется следующим образом

$$\rho_j = \left( \sum_{i=1}^{n_c} x_{ij} / \rho_{ci} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Сравнение формул (23) и (24) дает

$$\rho_{cj} c_{ij} = \rho_j x_{ij}. \quad (25)$$

Поделив уравнение (25) на  $\rho_{inj}$  и подставив его в уравнение (19) с  $u_D = 1$ , то после деления результата на  $\rho_{cj}/\rho_{inj}$  получим набор уравнений сохранения для чистой конвекции с постоянным объемом при перемешивании [1]

$$\frac{\partial C_i}{\partial t_D} + \frac{\partial F_i}{\partial x_D} = 0, \quad i = 1 \dots n_c - 1, \quad (26)$$

где  $C_i$  есть общая объемная доля  $i$ -го компонента равная

$$C_i = \sum_{j=1}^{n_p} c_{ij} S_j, \quad (27)$$

и  $F_i$  есть общий объемная доля расхода  $i$ -го компонента равная

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_p} c_{ij} f_j. \quad (28)$$

#### Начальные и граничные условия

До того как уравнения (22) и (26) смогут быть решены, должны быть наложены определенные начальные и граничные условия. Будем искать решения при постоянном начальном составе, определенном на полубесконечной области как

$$u_i(x_D, 0) = u_i^{init}, \quad 0 < x_D < \infty, \quad i = 1 \dots n_c, \quad (29)$$

и граничном условии, которым является постоянный состав нагнетаемого флюида, записываемого в виде

$$u_i(0, t_D) = u_i^{inj}, \quad t_D > 0, \quad i = 1 \dots n_c, \quad (30)$$

где  $u_i$  это либо  $G_{iD}$ , либо  $C_i$ ; верхние индексы  $init$  и  $inj$ <sup>2</sup> обозначают нагнетаемый и начальный составы  $i$ -го компонента соответственно. Таким образом, в момент времени  $t_D = 0$  состав флюида в точке входа претерпевает разрыв от начального значения до нагнетаемого значения.

Задачи, в которых начальное состояние (иногда называемое правым состоянием) и вышерасположенное граничное условие (иногда называемое левым состоянием) являются постоянными, известны как задачи Римана<sup>3</sup> [1, 2].

<sup>2</sup> От англ. слов initial (начальный) и injected (нагнетаемый) соответственно.

<sup>3</sup> Под задачей Римана понимается частный случай задачи Коши (задача с начальными условиями, определяемыми на неограниченном интервале), где начальные данные являются кусочно-постоянными состояниями, разделенные одиночным разрывом непрерывности.

Такие задачи можно рассматривать с точки зрения распространения разрыва непрерывности, первоначально расположенного в точке  $x_D = 0$ , между постоянными начальными состояниями на интервале  $-\infty < x_D < 0$  (нагнетаемый состав) и на интервале  $0 < x_D < \infty$  (начальный состав), поэтому условия (29) и (30) часто записывают в следующем виде

$$u_i(x_D, 0) = \begin{cases} u_{i,l}, & x_D < 0 \\ u_{i,r}, & x_D > 0 \end{cases}, \quad i = 1 \dots n_c, \quad (31)$$

где  $u_i$  это либо  $G_{iD}$ , либо  $C_{iD}$ ; нижние индексы  $l$  и  $r$ <sup>4</sup> обозначают нагнетаемый и начальный составы  $i$ -го компонента соответственно. В этом случае начальное условие (31) определяется уже на неограниченной области.

Зная, что задача фильтрации смеси начинается с распространения разрыва, очевидно, что решения могут также иметь разрывы, известные как ударные волны (фронты или скачки насыщенности (концентрации)). Несмотря на то, что дифференциальные уравнения (22) и (26), выражающие баланс количества вещества, в точках введенного разрыва не имеют смысла, сам баланс, естественно, должен выполняться, но должен записываться в интегральном виде [1, 9].

#### Аналитическое решение задачи Римана (двухфазная фильтрация несмешивающихся флюидов)

Основные идеи и результаты, приведенные в этом и последующих разделах, базируются на источниках [1, 2, 9]. В работе [1] приводится решение задачи многокомпонентного вытеснения нефти газом, как современное обобщение хоро-

шо известной проблемы двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (решенного впервые Баклеем и Левереттом в 1942 г. для случая вытеснения нефти водой, см. [9, глава 8] для более полного описания проблемы). В диссертации [2, глава 5] дается аналитическое решение задачи Римана, как для двухфазной фильтрации, так и в случае трехфазного вытеснения. При этом флюиды считаются несмешивающимися и несжимаемыми. В учебнике [9] помимо решения уравнения Баклея-Леверетта, как простейшего случая вытеснения одной жидкости другой, также дается его обобщение применительно к одномерному течению несжимаемых жидкостей. Кроме того, в [9, с. 270—274] подробно описано графическое построение разрывного решения даже в случае нестационарного скачка насыщенности.

Рассмотрим одномерный двухфазный поток несмешивающихся и несжимаемых жидкостей через несжимаемую пористую среду в отсутствии гравитационных и капиллярных эффектов. Тогда учитывая, что в этом случае  $x_{ij} = 1$ ,  $\rho_{jD} = 1$  и  $u_{jD} = 1$ , система уравнений (19) примет вид единственного (скалярного) квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial f_1}{\partial x_D} = 0, \quad (33)$$

с начальным условием (31), где функция распределения потоков  $f_1$  (ее еще называют функцией Баклея-Леверетта) определяется из (11) как

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_T} = \frac{k_{r1}/\mu_1}{k_{r1}/\mu_1 + k_{r2}/\mu_2}. \quad (34)$$

<sup>4</sup> От англ. слов left (левый) и right (правый) соответственно.

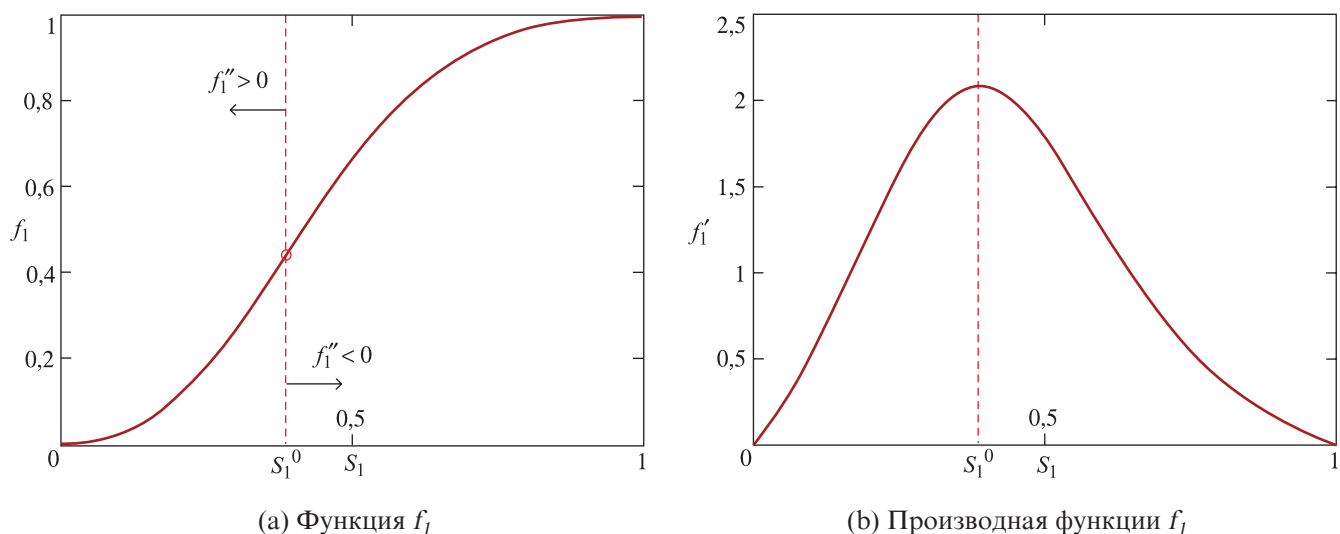
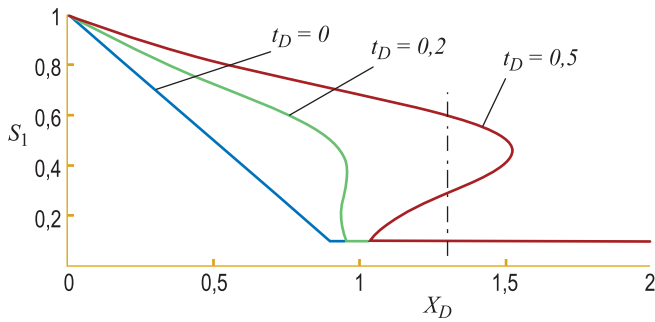
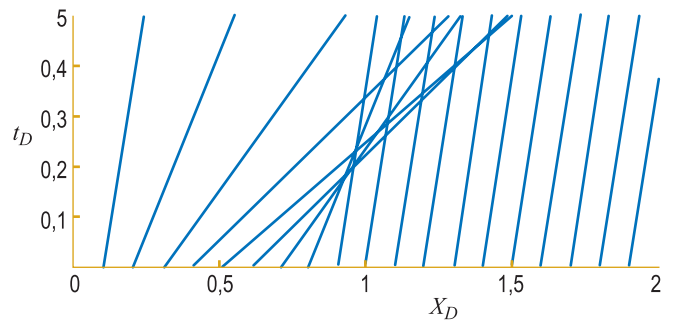


Рисунок 1. Идеализированная функция распределения потока  $f_1$  для  $\tilde{\mu} = 0,5$



(а) Профиль насыщенности



(б) Характеристики

**Рисунок 2.** Задача Баклея-Левверетта приводит к нефизическим неоднозначным решениям с характеристиками, которые пересекаются друг с другом даже при гладких начальных условиях [2]

Будем считать, что фазовые вязкости постоянные и не зависят от температуры и давления. Таким образом, характер уравнения является прямым следствием выбранной модели для относительной проницаемости [2]. Для простоты относительные проницаемости рассматриваются как функции только насыщенностей. Примером обычно принимаемого поведения относительных проницаемостей для двухфазной системы являются следующие функции

$$k_{r1} = S_1^2; \quad k_{r2} = (1 - S_1)^2. \quad (35)$$

Тогда из выражения для функции распределения потоков (34) и функций для относительных проницаемостей (35) получим

$$f_1(S_1) = \frac{k_{r1}}{k_{r1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_{r2}} = \frac{S_1^2}{S_1^2 + \tilde{\mu}(1 - S_1)^2}, \quad (36)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu_1 / \mu_2$ . Вид функции  $f_1$  и ее производной показаны на рис. 1. Несмотря на простой вид, выбранная модель демонстрирует ключевую особенность двухфазного потока через пористую среду: функция  $f_1$  является S-образной, а значит двояковыпуклой.

Поскольку вещественная функция  $f_1$  зависит только от  $S_1$ , уравнение (32) является гиперболическим. На рис. 1а видно, что отрезок насыщенности  $S = [0, 1]$  можно разбить на вогнутую и выпуклую область  $S = [0, S_1^0] \cup [S_1^0, 1]$ , соответственно. Более того, производная функции  $f_1$  достигает максимального значения в точке перегиба (см. рис. 1б). Как будет видно дальше, эти свойства функции  $f_1$  определяют допустимые решения процессов двухфазного вытеснения.

Для построения решения уравнения (33) можно использовать метод характеристик (см.

[1, 2, 9]). Поскольку  $f_1$  есть функция только  $S_1$ , то уравнение (33) может быть переписано

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{df_1}{dS_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} = 0. \quad (37)$$

Значение дифференциала  $dS_1$  можно записать в следующем виде:

$$dt_D \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + dx_D \frac{\partial S_1}{\partial x_D} = dS_1. \quad (38)$$

Рассмотрим на плоскости  $(x_D, t_D)$  такие линии  $x_D(t_D)$ , вдоль которых насыщенность принимает заданное постоянное значение. Эти линии иногда называют изосатами<sup>5</sup> [9]. Тогда для любого заданного значения можно установить такую связь между  $x_D$  и  $t_D$ , что удовлетворяется уравнение  $S_1 = S_1(x_D, t_D) = \text{const}$  [9], что эквивалентно  $dS_1 = 0$  в уравнении (38). Другими словами, следует совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{df_1}{dS_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_D} = 0 \\ dt_D \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + dx_D \frac{\partial S_1}{\partial x_D} = 0 \end{cases},$$

которая будет иметь нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & df_1/dS_1 \\ dt_D & dx_D \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$\left. \frac{dx_D}{dt_D} \right|_{S_1 = \text{const}} = \frac{df_1}{dS_1}. \quad (39)$$

Уравнение (39) есть дифференциальное уравнение характеристической линии или характеристики. Поскольку  $S_1 = \text{const}$  вдоль каждой характеристики, то остается постоянной

<sup>5</sup> От англ. слова saturation — насыщенность, т.е. линии постоянной насыщенности

вдоль этой кривой и  $df_1/dS_1$ . Тогда, проинтегрировав уравнение (39), найдем:

$$x_D = \frac{df_1}{dS_1} t_D + x_D^0, \quad (40)$$

где  $x_D^0$  — начальная позиция насыщенности  $S_1$ , для которой вычисляется  $df_1/dS_1$ . Таким образом, в данном случае характеристики являются прямыми, тангенс угла наклона которых к оси  $t_D$  равен  $df_1/dS_1$ , т.е. зависит от насыщенности в точке  $(x_D, t_D)$ .

Можно показать (см. [2]), что построение решения при заданной функции форме  $f_1$  (см. рис. 1а) приведет к неоднозначным решениям даже при гладких начальных условиях (рис. 2). Это нефизическое поведение говорит о том, что классическое решение должно быть заменено решением со слабым разрывом [1, 2, 9].

Уравнение (33) обладает свойство инвариантности по отношению к равномерному растяжению координат  $(x_D, t_D) \mapsto (cx_D, ct_D)$  и таким образом имеет автомодельное решение. Это означает, что решение в различные моменты времени может быть получены из других решений путем преобразования подобия (Varenblatt, 1996, см. [1, с. 159]). При этом решение имеет следующий вид [1]

$$S_1(x_D, t_D) = S_1(\zeta), \quad (41)$$

где в данном случае переменная подобия определяется просто как

$$\zeta = \frac{x_D}{t_D}. \quad (42)$$

Можно показать (см., например, [1]), что автомодельное решение (41) задачи Римана (33) является комбинацией постоянных состояний, ударных волн, объединяющих постоянные состояния, и волн разрежения, соединяющих постоянные состояния или слабые разрывы (здесь и далее будем использовать термины из газовой динамики). Более точно, поскольку для строго гиперболических систем (каким является уравнение (33)) разнотипные волны четко разделены, любое автомодельное решение задачи Римана для системы  $n \times n$  содержит  $n+1$  постоянных состояний. В случае двухфазного течения, задача Римана включает в себя скалярное уравнение (33) с начальным условием вида (31). Таким образом, левые и правые состояния ( $S_{1,r}$  и  $S_{1,l}$ ) соединяются единственной волной [1]:

$$S_{1,l} \xrightarrow{w} S_{1,r}. \quad (43)$$

Когда функция  $f_1$  скалярного уравнения баланса является выпуклой, то появляющаяся в

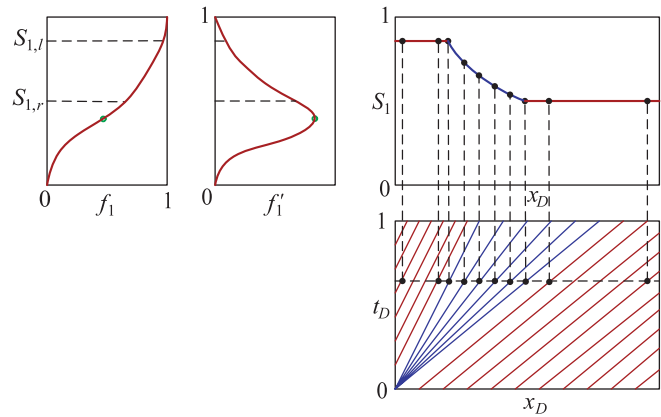


Рисунок 2. Пример решения задачи Римана с одиночной волной разрежения для двухфазного потока

решении волна это либо ударная волна, либо волна разрежения. Для немонотонной функции  $f_1$ , как в представленном случае (см. рис. 1а), характеристическая волна может включать в себя оба типа волн (LeVeque, 1992, см. [1]). Существуют три возможных типа волны: одиночная волна разрежения, одиночная ударная волна и смешанная волна.

#### Одиночная волна разрежения (R)

Волна разрежения (rarefaction wave)<sup>6</sup> это гладкое решение  $S_1(\zeta)$ , при этом  $S_1(\zeta_l) = S_{1,l}$  и  $S_1(\zeta_r) = S_{1,r}$ . Для гладкого, непрерывного и дифференцируемого решения, подстановка уравнений (41) и (42) в (37) дает

$$f_1'(S_1) S_1' = \zeta S_1'. \quad (44)$$

Если решение не является постоянной функцией, т.е. если  $S_1' \neq 0$ , то должно выполняться:

$$\zeta = f_1'(S_1). \quad (45)$$

Ясно, что решение будет существовать, только если скорость характеристик  $f_1'$  монотонно возрастает от левого до правого положения. Иначе характеристики пересекутся на плоскости  $(x_D, t_D)$ , и решение не будет однозначным. Для монотонно возрастающей скорости характеристик, левое и правое состояние должны находиться в той же самой области выпуклости, т.е. (см. рис. 1)

$$S_{1,l} > S_{1,r} \geq S_1^0, \text{ или } S_{1,l} < S_{1,r} \leq S_1^0. \quad (46)$$

Неравенства (46) являются простыми условиями того, что насыщенности в решении, которые находятся ниже по потоку, должны двигаться с большей скоростью, чем те, что лежат ближе к месту нагнетания. Иначе, медленно

<sup>6</sup> Известная также как рассеивающаяся или расширяющаяся волна (spreading wave или expansion wave, соответственно).

движущиеся насыщенности ниже по потоку будут «обгоняться» более быстрыми вышерасположенными насыщенностями. Идея часто формулируется следующим образом (см. [1]).

**Ограничение на скорость:** скорости характеристик в двухфазной области должны монотонно уменьшаться от нижерасположенных насыщенностей до насыщенностей выше по потоку на всех участках, где насыщенности изменяются непрерывно.

Когда выполняется ограничение на скорость, решение является однозначным. Волны насыщенностей, которые удовлетворяют условию (46), иногда характеризуются как совместимые, а ограничение на скорость может также называться условием совместимости [1].

Пример решения с одиночной волной разрежения показан на рис. 2. Рисунок включает в себя: (а) функцию  $f_1$  с указанием левого и правого состояния; (б) производную от  $f_1$ ; (в) решение для некоторого момента времени  $t_D$ ; (г) характеристики на плоскости  $(x_D, t_D)$ .

#### Одиночная ударная волна (S)

Ударная волна это движение скачка (фронта) насыщенности, характеризующая наличие разрыва в решении. Появление разрывов есть результат так называемых слабых решений, при которых возможна ситуация когда скорость характеристики  $f'_1$  в левом состоянии больше, чем в правом состоянии [2]. Другими словами, характеристики пересекутся, и решение станет неоднозначным. Такая неоднозначность устраняется введением скачка насыщенности, при переходе через который насыщенность меняется на конечную величину.

Поскольку скачок приводит к тому, что кривая  $S_1(\zeta)$  в этой точке становится вертикальной, т.е. производная  $S'_1$  обращается в бесконечность, то дифференциальное уравнение (37) больше не имеет смысла. Тем не менее, материальный баланс выполняется и в этом случае. Дадим вывод соотношения, выражающее условие сохранения массы на скачке насыщенности (см. [9]).

Пусть  $x_D^\sigma(t_D)$  — закон движения скачка насыщенности, так что  $\sigma = dx_D^\sigma/dt_D$  — скорость движения разрыва. И пусть скачок проходит через элемент пористой среды, выделенный по нормали к поверхности разрыва и ограниченный участками поверхностей, параллельных плоскости скачка и находящихся на малом расстоянии  $\Delta h$  от нее (четыреугольник  $ABCD$  в

проекции на плоскость  $(x_D, t_D)$  на рис. 3). Поскольку интегральный баланс массы в элементе  $ABCD$  ( $\Sigma$ ) выполняется, то, проинтегрировав (37) по площади  $\Sigma$ , получим:

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + f'_1(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x_D} \right) dx_D dt_D = 0$$

Отсюда, преобразовав поверхностный интеграл в интеграл по контуру  $ABCD$  ( $\Gamma$ ) по формуле Грина, получим:

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial S_1}{\partial t_D} + f'_1(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x_D} \right) dx_D dt_D = \oint_{\Gamma} -S_1 dx_D + f_1(S_1) dt_D = 0.$$

В случае, если ширина четырехугольника  $ABCD$  мала ( $\Delta t_D \rightarrow 0$ ), то можно пренебречь интегралами по участкам  $DA$  и  $BC$ . Тогда из вышеприведенного выражения получим с точностью до малых высшего порядка

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} -S_1 dx_D + f_1(S_1) dt_D &= \oint_{\Gamma} \left( S_1 \frac{dx_D^\sigma}{dt_D} - f_1(S_1) \right) dt_D \\ &= \oint_{\Gamma} (S_1 \sigma - f_1(S_1)) dt_D \approx \\ &\approx \int_{AB} (S_1 \sigma - f_1(S_1)) dt_D - \int_{DC} (S_1 \sigma - f_1(S_1)) dt_D \approx \\ &\approx (S_1^+ \sigma - f_1(S_1^+)) \Delta t_D - (S_1^- \sigma - f_1(S_1^-)) \Delta t_D = 0, \end{aligned}$$

откуда при  $\Delta h \rightarrow 0$  находим условие на скачке

$$\sigma = \frac{dx_D^\sigma}{dt_D} = \frac{f_1(S_1^+) - f_1(S_1^-)}{S_1^+ - S_1^-}. \quad (47)$$

Условие (47) называют соотношением Рэнкина-Гюгонно [1, 2, 9], являющееся интеграль-

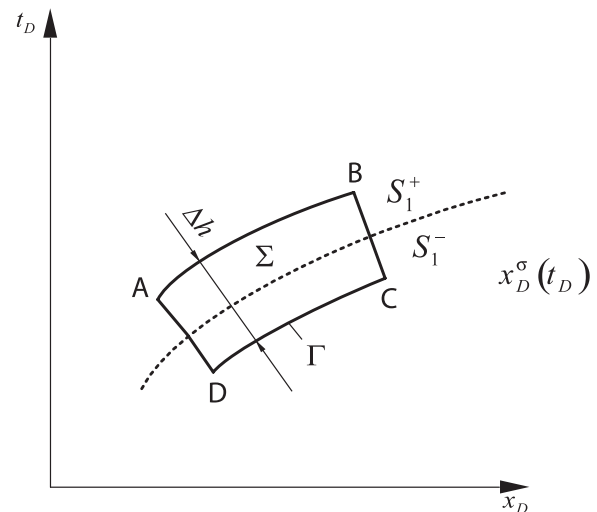


Рисунок 3. Схема к выводу условий на скачке

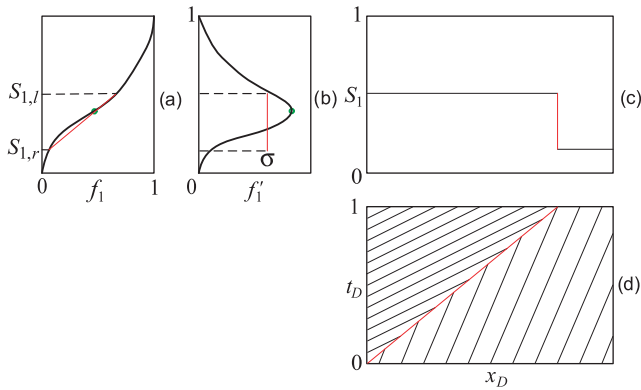


Рисунок 4. Пример решения задачи Римана с одиночной ударной волной для двухфазного потока

ной формой оригинального материального баланса.

В случае стационарного скачка, по обе стороны которого значения  $S_1^+$  и  $S_1^-$  постоянные, скорость распространения скачка равна скорости распространения насыщенности на скачке<sup>7</sup> (доказательство см. в [9]), т.е.

$$\sigma = \frac{f_1(S_1^+) - f_1(S_1^-)}{S_1^+ - S_1^-} = f_1'(S_1^+). \quad (48)$$

Оказывается, что для построения единственного и устойчивого разрывного решения, условий (47) и (48) недостаточно. Можно построить множество решений, которые будут удовлетворять этим условиям. Поэтому требуются некоторые дополнительные рассуждения (см. [1, 2, 9]), позволяющие определить, какому из этих решений отдать предпочтение.

Две физические идеи играют роль в этих рассуждениях. Первая из них уже была сформулирована как ограничение на скорость при рассмотрении одиночной волны разрежения.

Вторая идея заключается в том, что ударная волна может существовать, только если она является устойчивой, т.е. она сохранит свою форму даже в случае небольшого «размазывания» ее фронта по сравнению с первоначальным «резким» скачком насыщенности, что могло бы случиться, например, в присутствии незначительной физической дисперсии. Эта идея часто формулируется в терминах скоростей волн следующим образом (см. [1]).

<sup>7</sup> Разрыв, скорость которого равняется скорости волны с одной стороны разрыва, иногда называют полуразрывом, промежуточным разрывом или касательной ударной волной.

<sup>8</sup> P. Wesseling в своей книге (см. [4], с. 367) дает интересные пояснения к условию энтропии: «... условие энтропии говорит о том, что характеристики никогда не выходят из линии разрыва, но всегда входят в нее. Это означает, что из каждой точки линии разрыва мы можем двигаться вдоль характеристики только обратно во времени, но не вперед. Другими словами, информация достигает разрыва только из прошлого, но не из будущего... В соответствии с различием между прошлым и будущим это условие энтропии определяет направление течения времени, а именно его необратимость. Необратимость тесно связана со вторым законом термодинамики, говорящий о том, что энтропия не уменьшается в замкнутой системе...». Отсюда становится понятно использования термина энтропии в данном контексте.

Условие энтропии: скорости волн на верхней и нижней стороне разрыва должны быть больше (или равны) и меньше (или равны) скорости распространения фронта ударной волны, соответственно (как правило, скорость волны может равняться скорости фронта только с одной стороны разрыва в данный момент времени).

Данное условие на самом деле не имеет ничего общего с термодинамической функцией энтропии, тем не менее, это название стало общепотребительным при описании решений консервативных гиперболических уравнений, поскольку идеи, положенные в условие, было впервые сформулированы для проблем течения сжимаемой жидкости, в которых энтропия должна возражать при движении поперек фронта ударной волны [1]. Разрыв, который удовлетворяет условию энтропии, иногда называется «самозатачивающимся» (см. [1]), поскольку он устойчив к малому размазыванию фронта.

Математически условие устойчивости разрыва в случае двояковыпуклой функции можно приставить в виде условия энтропии Олейник (см. [2, 9])

$$\frac{f_1(S_1) - f_1(S_1^-)}{S_1 - S_1^-} \geq \sigma \geq \frac{f_1(S_1) - f_1(S_1^+)}{S_1 - S_1^+}, \quad (49)$$

для всех  $S_1 \in (S_1^-, S_1^+)$ , где скорость разрыва вычисляется по формуле (47).

В случае двухфазного потока, где функция  $f_1$  имеет только одну точку перегиба, связанной с максимумом значения производной, условие (49) упрощается и принимает вид условия энтропии Лакса (см. [2, 9])

$$f_1'(S_1^-) \geq \sigma \geq f_1'(S_1^+). \quad (50)$$

На рис. 4 показан случай одиночного разрыва между двумя постоянными состояниями, включающий: (а) функцию  $f_1$  с указанием левого и правого состояния; (б) производную от  $f_1$ ; (с) решение для момента времени  $t_D = 1$ ; (д) характеристики на плоскости  $(x_D, t_D)$ . Решение удовлетворяет условиям (49) и (50), означающее, что на линии разрыва должны пересекать-

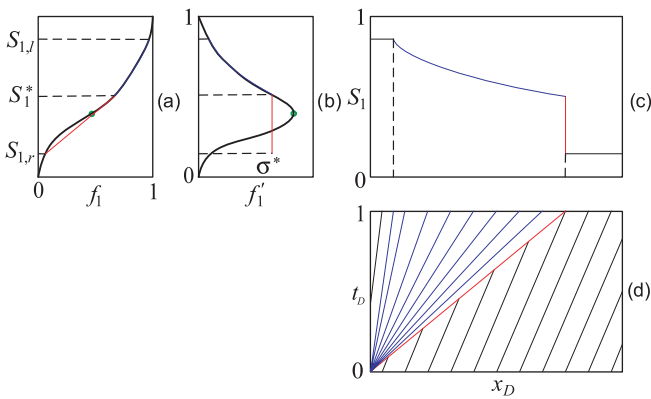


Рисунок 5. Пример решения задачи Римана со смешанной волной для двухфазного потока

ся две приходящие характеристики, несущие начальные значения насыщенности<sup>8</sup>.

**Смешанная волна (RS)**

В случае, когда левое и правое состояния невозможно соединить с помощью простой волны, требуется смешанная волна, состоящая из волны разрежения и ударной волны. Левое и правое состояния должны располагаться в областях с разным типом выпуклости, так что скорость характеристик уже не является монотонной, т.е.

$$S_{1,l} > S_1^0 > S_{1,r}, \text{ или } S_{1,l} < S_1^0 < S_{1,r}. \quad (51)$$

Решение состоит только из одной волны разрежения и одной ударной волны, потому что функция  $f_1$  имеет только одну точку перегиба. Более того, поскольку точка перегиба соответствует максимальному значению производной  $f_1'$ , то волна разрежения всегда медленнее ударной волны (см. [2]). Обе волны соединяют-

ся в некоторой промежуточной точке  $S_1^*$ , называемой пост-разрывным значением [2]. В этой точке скорость левой характеристики (волна разрежения) совпадает со скоростью разрыва справа (ударная волна):

$$f_1'(S_1^*) = \sigma^* = \frac{f_1(S_1^*) - f_1(S_{1,r})}{S_1^* - S_{1,r}}. \quad (52)$$

Волну объединяющей левое и правое постоянные (т.е.  $W \equiv RS$ ) состояния схематично можно изобразить, как показано ниже [2]:

$$S_{1,l} \xrightarrow{R} S_1^* \xrightarrow{S} S_{1,r}. \quad (53)$$

Решение, которое включает смешанную волну, показано на рис. 5 с аналогичными обозначениями, как и в более ранних случаях. В диссертации [2, с. 166, рис. 5.11] приводится алгоритм, который дает полный набор решений в процессе построения структуры волны для двухфазного несмешивающегося потока.

**Аналитическое решение задачи Римана (двухфазная двухкомпонентная фильтрация флюидов)**

Рассмотрим одномерную двухфазную двухкомпонентную (с неизменным объемом при перемешивании) фильтрацию, полагая при этом флюиды и пористую среду несжимаемыми, а также отсутствие эффектов гравитации и капиллярного давления. Тогда уравнение (26) сводится к единственному (скалярному) квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial C_1}{\partial t_D} + \frac{\partial F_1}{\partial x_D} = 0, \quad (53)$$

с начальным и граничным условиями (29) и (30) соответственно, где общая доля 1-го ком-

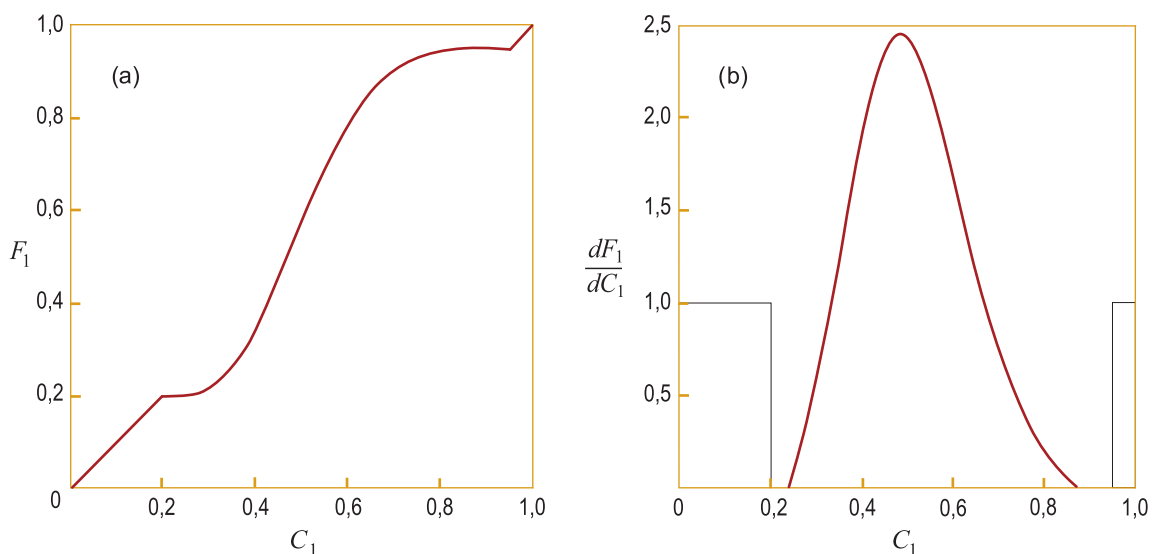


Рисунок 6. Функция доли 1-го компонента в общем потоке  $F_1(C_1)$  и ее производная  $dF_1/dC_1$  [1]

понента  $C_1$  в двухфазной области определяется из (27) как

$$C_1 = c_{11}S_1 + c_{12}(1 - S_1), \quad (54)$$

и общая доля 1-го компонента в потоке для двухфазной области определяется из (28) как

$$F_1 = c_{11}f_1 + c_{12}(1 - f_1). \quad (55)$$

Равновесные доли  $c_{11}$  и  $c_{12}$  известны и постоянны в предположении о локальном химическом равновесии. Для любой смеси, которая образует только одну фазу ( $C_1 < c_{12}$  или  $C_1 > c_{11}$ ), выполняется равенство [1]

$$F_1 = C_1. \quad (56)$$

Аналогично выражению (39) можно записать уравнение для скорости распространения общей объемной доли 1-го компонента  $C_1$  вдоль характеристической кривой

$$\left. \frac{dx_D}{dt_D} \right|_{C_1 = \text{const}} = \frac{dF_1}{dC_1}, \quad (57)$$

проинтегрировав которое получим уравнение характеристики аналогичное выражению (40)

$$x_D = \frac{dF_1}{dC_1} t_D + x_D^0. \quad (58)$$

Рассмотрим конкретный пример вытеснения нефти газом из [1] со следующими исходными данными: чистый 1-й компонент ( $C_1^{inj} = 1$ ) вытесняет однофазную смесь 1-го и 2-го компонентов, содержащую 5% компонента 1 ( $C_1^{init} = 0,05$ ). Равновесная газовая фаза содержит 95% 1-го компонента ( $c_{11} = 0,95$ ), а равновесная жидкая фаза содержит 20% компонента 1 ( $c_{12} = 0,20$ ). На рис. 6 показана функция  $F_1(C_1)$  и ее производная  $dF_1/dC_1$  для данного примера взятого из [1].

Поскольку функция  $F_1$  (рис. 6 а) имеет более сложную форму, чем функция  $f_1$  в случае двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (см. рис. 1 а), то волна, соединяющая левое и правое состояния, будет смешанной и содержать уже два разрыва: передний и задний. Несмотря на отличие в получаемых решениях все ограничения (на скорость и условие энтропии)

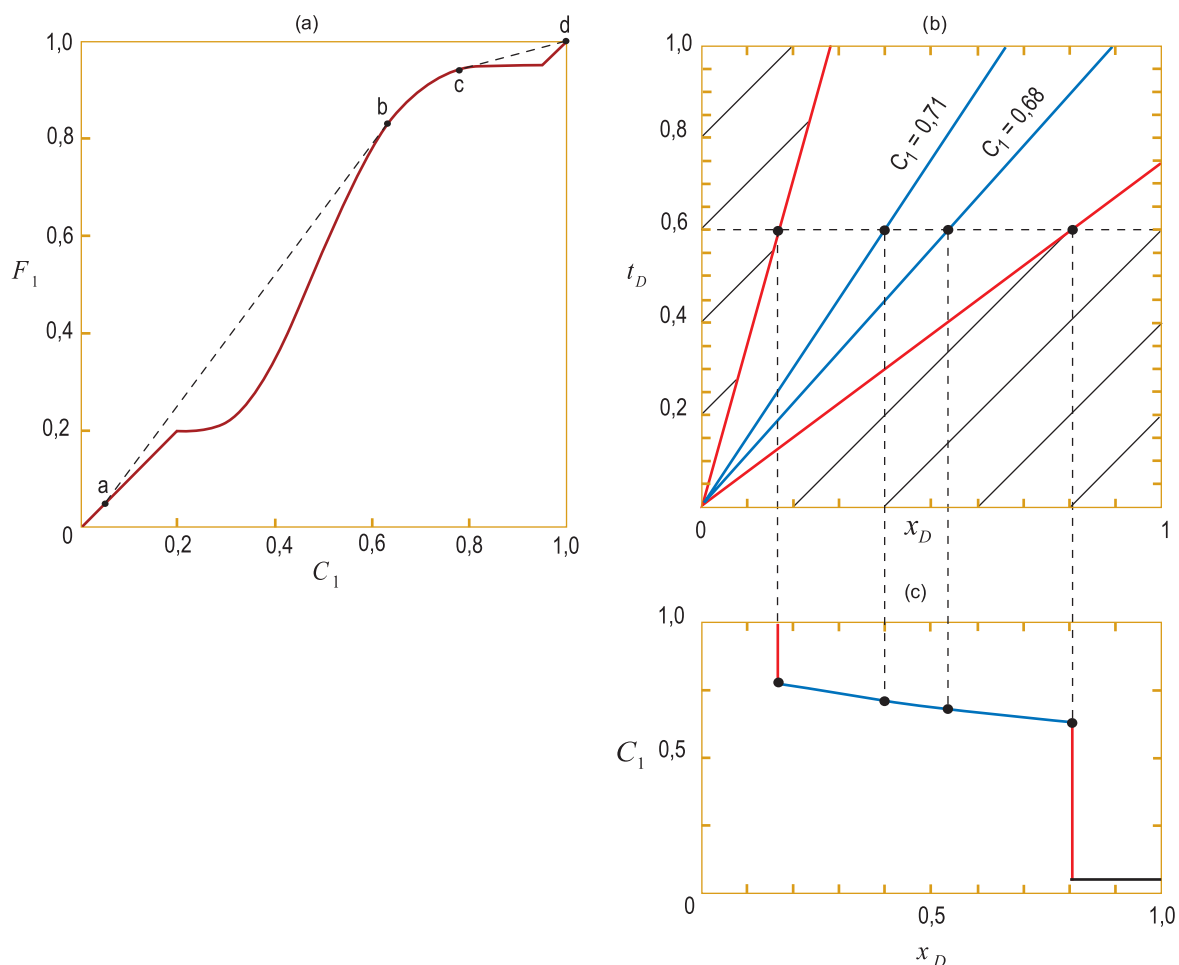


Рисунок 7. Пример из [1] решения задачи Римана со смешанной волной для двухфазного двухкомпонентного потока

сформулированные для двухфазного несмешивающегося потока действуют и для этого случая вытеснения. Оба разрыва стоят с нахождения промежуточной точки, в которой скорость волны объемной доли 1-го компонента  $C_1$  будет равна скорости движения фронта, т.е. наклон хорды, определяющей скорость разрыва, будет совпадать с наклоном касательной, проведенной в этой точке.

На рис. 7а показано результирующее построение для переднего ( $a \rightarrow b$ ) и заднего ( $c \rightarrow d$ ) скачков объемной доли. Оба фронта соединяются волной разрежения, для которой строятся «веерные» характеристики ( $b \rightarrow c$ ) лежащие между линиями разрывов (рис. 7 б). На рис. 7с показано решение для  $C_1$  в момент времени  $t_D = 0,6$ , из которого следует, что суммарное количество 1-го компонента в каждой из фаз (общая объемная доля  $C_1$ ) изменяется в двухфазной области за счет переменных величин насыщенностей фазами, но сами фазовые составы (объемные доли  $c_{11}$  и  $c_{12}$ ) остаются неизменным. Это связано с равновесием, в котором находятся обе фазы.

#### Аналитическое решение задачи Римана (дисперсионно-конвективное уравнение)

Если присутствуют только два компонента и одна фаза, то в предположении о постоянной пористости и неизменном объеме при перемешивании уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0, \quad (59)$$

где  $C$  — объемная доля одного компонента;  $K_1$  — коэффициент продольной дисперсии, который здесь считается независимым от состава. Приводя уравнение (59) к безразмерному виду, получим

$$\frac{\partial C}{\partial t_D} + \frac{\partial C}{\partial x_D} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial x_D^2} = 0, \quad (60)$$

где  $Pe = uL/\phi K_1$  — число Пекле. Число Пекле это отношение характеристического времени дисперсии ( $L^2/K_1$ ) и характеристического времени конвекции  $\phi L/u$ . При большом числе Пекле влияние дисперсии мало и в общем движении преобладает конвекция. Таким образом, уравнения (22) и (26) можно рассматривать как предельные случаи при большом числе Пекле.

Если значение  $K_1$  постоянное (не зависит от состава), то число Пекле также неизменно, и уравнение (60) может быть легко решено с ис-

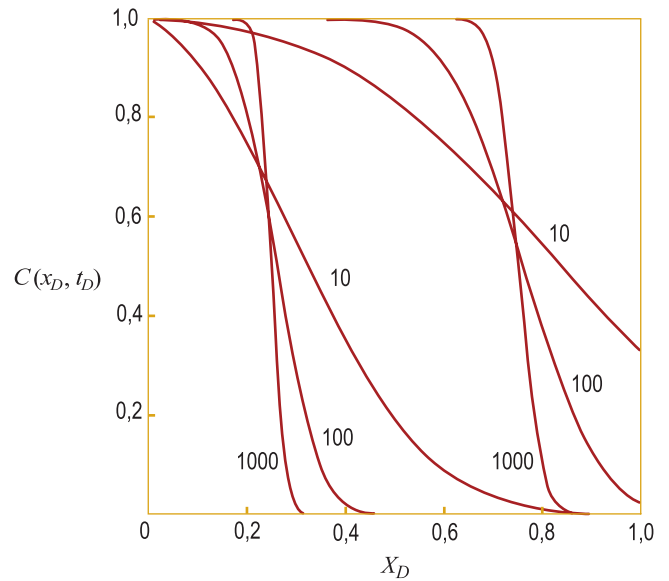


Рисунок 8. Решение дисперсионно-конвективного уравнения в моменты времени  $t_D=0,25$  и  $0,75$  для  $Pe=10, 100$  и  $1000$  [1]

пользованием преобразования Лапласа. Для выбранных области  $0 \leq x_D < \infty$ , начальной концентрации  $C(t_D, 0) = 0$  для  $0 \leq x_D < \infty$  и граничном условии  $C(0, t_D) = 1$  для  $t_D > 0$  решением является (см. [1])

$$C(x_D, t_D) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{Pe} (x_D - t_D)}{2\sqrt{t_D}} \right) + \frac{1}{2} e^{x_D Pe} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{Pe} (x_D + t_D)}{2\sqrt{t_D}} \right) \quad (61)$$

Первый член правой части уравнения (61) обычно значительно больше второго члена. Второй член является значимым только в ранние моменты времени, когда число Пекле мало. Однако при больших значениях числа Пекле ( $Pe > 1000$ ) второй член отбрасывается. Поэтому часто вместо решения (61) используется приближенное решение

$$C(x_D, t_D) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{Pe} (x_D - t_D)}{2\sqrt{t_D}} \right). \quad (62)$$

На рис. 8 показан график решения (61) для трех значений числа Пекле. Из рисунка видно, что для каждого значения числа Пекле, переходная зона от нагнетаемого состава ( $C = 1$ ) до начального состава ( $C = 0$ ) увеличивается в направлении движения потока. Ширина переходной зоны увеличивается с уменьшением числа Пекле.

Решение при  $Pe = 1000$  почти симметрично относительно прямой  $x_D = t_D$ . Уравнение (62) описывает распределение концентрации, которое полностью симметрично относительно прямой  $x_D = t_D$  (при этом  $C = 0,5$  в точке  $x_D = t_D$ ). В пределе ( $Pe \rightarrow \infty$ ) решение приводит к однофазному поршневому вытеснению при отсутствии дисперсии.

В большинстве практических случаев, числа Пекле достигают достаточно больших значений (например, при больших скоростях фильтрации), поэтому поток флюидов рассматривается без учета их дисперсии.

### Заключение

В представленной статье приведены аналитические решения частных случаев одномерной многофазной многокомпонентной фильтрации, полученных за счет ряда существенных упрощений основного уравнения (10). Тем не менее, анализ таких одномерных течений позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности совместной фильтрации смеси флюидов и сопоставить их с результатами лабораторных экспериментов.

Первый случай двухфазной фильтрации не смешивающихся жидкостей представляет первый шаг на пути решения сложной проблемы многофазного движения флюидов без фазовых переходов. Решение этой задачи, впервые предложенное американскими исследователями С. Баклеем и М. Левереттом, не противоречит экспериментальным фактам (при высокой скорости потока [5]) и имеет существенное практическое применение. В частности, решение Баклея-Леверетта позволяет определить среднюю насыщенность в безводный период, рассчитать среднюю насыщенность после прорыва воды и на базе этого получить простую формулу для расчета коэффициента нефтеотдачи. Подобные формулы, вытекающие из точного решения задачи о вытеснении нефти (или газа) водой, применяются при оценочных инженерных расчетах основных технологических параметров разработки нефтегазовых месторождений с использованием процесса заводнения [9].

Второй случай двухфазной двухкомпонентной фильтрации является частичным обобщением задачи Баклея-Леверетта с учетом фазовых превращений (см. [1]). Представленная здесь двухкомпонентная проблема является относительно несложной вследствие того, что вытеснение «осуществляется» в пределах одной рабочей линии (ноды) на диа-

грамме равновесия жидкость-пар. Несмотря на это, решение такой задачи является основой для описания более сложных видов фильтрации смесей флюидов с множеством компонент.

Третий случай движения двух компонентов, образующих одну фазу, также имеет широкую область применения в нефтепромысловых исследованиях. При этом данный случай часто называют фильтрацией смешивающихся флюидов (см. [2, 5]) и рассматривают с точки зрения движения индикатора, который добавляется в основную жидкость в очень малом количестве (например, смесь из воды и радиоактивного индикатора) и не влияет на ее свойства (плотность, вязкость и т.д.). Такой вид фильтрации обладает численным преимуществом: эллиптическое уравнение для давления решается только один раз и отдельно от уравнений сохранения массы (или объема в случае идеального перемешивания), так как в системе присутствует только одна фаза. Существуют три основных направления в применении аналитического решения задачи движения системы индикатор-жидкость на практике:

— исследование численной дисперсии (разумеется, в отсутствие физической диффузии, когда наблюдается т.н. поршневое вытеснение индикатором компонента жидкости), вносимой конечно-разностными схемами;

— изучение влияния неоднородностей в строении пласта на процесс фильтрации;

— сравнение различных численных методов аппроксимации уравнений сохранения (по скорости, точности и т.д.), когда задача фильтрации смешивающихся флюидов берется как тестовая (см., например, [2]).

Для всех случаев используются одинаковые начальные и граничные условия, и может показаться удивительным тот факт, что решение задачи Римана на бесконечной области и кусочно-постоянными начальными условиями с односторонним разрывом является чрезвычайно значимым для практического применения. Множество лабораторных экспериментов фактически воспроизводят условия задачи Римана: первоначально среда имеет однородные насыщенности, а пропорция нагнетаемых флюидов остается постоянной в течение эксперимента. Решение задачи Римана дает также информацию о структуре системы уравнений, и может быть использовано как строительный блок для получения решений задач с более сложными начальными и граничными условиями [2, 9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Orr, F.M. Jr., Theory of gas injection processes. — Stanford University, Stanford, California, 2005. — 283 pp.

2. Juanes, R., Displacement theory and multiscale numerical modeling of hree-phase flow in porous media: PhD Thesis. — University of California, Berkeley, 2003. — 377 pp.

3. Neta, B., Numerical solution of partial differential equations: MA 3243 Lectures notes. — Monterey, California, USA: Naval Postgraduate School (Department of Mathematics), 2003. — 256 pp.

4. Wesseling, P., Principles of computational fluid dynamics. — Verlag-Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2001. — 644 pp.

5. Bear, J., Dynamics of fluids in porous media. — New York: Dover Publications Inc., 2005. — 784 pp. Reprint. Originally published: New York: American Elsevier Pub. Co., 1972.

6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 628 с. Репринтное издание. Оригинальное издание: М.-Л.: Гостоптехиздат, 1949 г.

7. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 416 стр. Репринтное издание. Оригинальное издание: М.: «Недра», 1982 г.

8. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 128 стр.

9. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. — М.: Недра, 1993. — 416 с.



**Лялин Вадим Евгеньевич;**  
д.т.н., профессор,  
заведующий кафедрой  
«Интеллектуальные информационные технологии» ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет» (ИжГТУ);  
проректор — директор Института математического моделирования разработки нефтяных месторождений ИжГТУ;

заслуженный изобретатель РФ;  
председатель двух докторских диссертационных советов при ИжГТУ, гл. редактор двух сборников научных трудов: «Математическое моделирование и интеллектуальные системы» и «Математические модели и информационные технологии в экономике», член редколлегии журналов: «Инфокоммуникационных технологий» г. Самара и «Vibration Engineering» г. Каунас (Литва).  
Лялин В.Е. 1950 года рождения, автор более 250 научных работ, более 20 монографий, имеет 151 патент РФ, подготовил 13 докторов и 55 кандидатов наук.  
Тел.: (3412) 28-89-13  
E-mail: velyalin@yandex.ru



**Сидельников Константин Анатольевич;**  
ООО «Институт Интеллектуальных Технологий»;  
аспирант ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет», автор 6 статей, посвященных нефтегазовой тематике.  
Тел.: (3412) 42-29-61;  
E-mail: sidelkin@yandex.ru

[www.ogbus.ru](http://www.ogbus.ru)

Гафаров Ш.А., Султанов В.Г.

**ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫЙ СОСТАВ ДЛЯ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ДОБЫЧИ НЕФТИ**  
[http://www.ogbus.ru/authors/Gafarov/Gafarov\\_5.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Gafarov/Gafarov_5.pdf)

Исследован и предложен поверхностно-активный полимерсодержащий состав (ПАС), обладающий высокими нефтewытесняющими свойствами. Эффективность нефтewытеснения достигается за счет повышения фазовой устойчивости его в пористой среде к электролитам, внутренней инверсии поверхностно-активной композиции с образованием широкого спектра поверхностно-активных составов, избирательно вытесняющих нефть с определенными свойствами, способностью к увеличению охвата пласта воздействием путем изменения его вязкости.  
Результаты промысловых исследований на Бобровском месторождении

ПО «Оренбургнефть» и Сосновском месторождении НГДУ «Кинельнефть» Самарской губернии показали достаточно высокую эффективность ОПЗ нагнетательных и добывающих скважин. Успешность операций по одиннадцати скважинам составила 100%. Суммарный прирост приемистости по девяти скважинам — 1500 м<sup>3</sup>/сут., а прирост дебита по двум нефтяным скважинам — 11,7 т/сут. или 40,3%. В отдельных нагнетательных скважинах произошло трехкратное увеличение приемистости и заметное выравнивание и увеличение профилей работы скважин, что положительно отразилось на добыче нефти в реагирующих скважинах.

Гафаров Ш.А.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ЛАБОРАТОРНОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЗАКАЧКИ «ПДС+ПАВ» В ПОРОВО-КАВЕРНОЗНО-ТРЕЩИННЫЕ КАРБОНАТНЫЕ ПЛАСТЫ БАЛКАНОВСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ АНК «БАШНЕФТЬ»**  
[http://www.ogbus.ru/authors/Gafarov/Gafarov\\_4.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Gafarov/Gafarov_4.pdf)

В работе экспериментально и на основе опытно-промысловых работ показана возможность использования ПДС+ПАВ для увеличения нефтеотдачи пластов.

Изучены особенности взаимодействия ПДС с карбонатной подложкой, установлена оптимальная последовательность закачки технологических жидкостей системы ПДС+ПАВ.

Опытно-промысловое использование ПДС+ПАВ привело к снижению средней обводненности продукции на 12,85%, увеличению добычи нефти, уменьшению себестоимости добытой нефти на 1,5 руб. за тонну.

Масланов А.А., Шайдаков В.В., Емельянов А.В., Хайруллина Э.Р., Халикова А.И.

**О СОВМЕСТИМОСТИ ПРЕСНЫХ И МИНЕРАЛИЗОВАННЫХ ВОД НГДУ «ТАТРИТЭКНЕФТЬ»**  
[http://www.ogbus.ru/authors/Maslanov/Maslanov\\_1.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Maslanov/Maslanov_1.pdf)

Целью работы являлось определение возможности выпадения осадков при смешении пресных и сточных вод, используемых далее для заводнения нефтяных пластов на месторождениях НГДУ «ТатРИТЭКнефть».

[www.ogbus.ru](http://www.ogbus.ru)